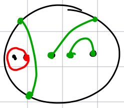
Curso Matt – Grupos de Artin-Tits & Grupos modulares

I. Trenzas & grupos modulares

- Para superficie en general — Farb Margalit



$\mathbb{D}_n$: disco cerrado con n puntos marcados $P = \{p_1, \dots, p_n\}$

Arcos : aplicación continua $a : [0,1] \longrightarrow D_n$ $\quad a(0) \in \partial D \cup P$

inyectiva en $]0,1[$ $\quad a(\,]0,1[\,) \cap (\partial D \cup P) = \emptyset$

Consideramos los arcos salvo isotopía: Si $\partial a \in \partial D$ entonces los extremos se pueden mover a lo largo de ∂D

a es esencial si no es isotópico a un arco constante.

Pensaremos en "arcos" salvo isotopía.

Una curva γ es simplemente cerrada en $\text{int}(\mathbb{D}) \setminus P$

γ es esencial si no es contraíble al mapeo constante. & NO es paralelo a $\partial \mathbb{D}$

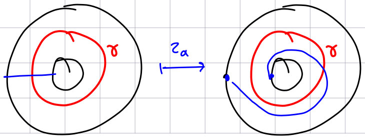
Observación Las curvas son curvas de Jordan, ie divide a $\mathbb{D}$ en dos componentes

Una curva es esencial $\iff$ Rodea a $2 \leq K \leq n-1$ puntos

$h \in \text{Homeo}(\mathbb{D}_n) \iff h$ es un homeomorfismo del disco $\mathbb{D}$ que preserva orientación & fija a P como conjunto (globalmente), $h|_{\partial D} = \text{id}$

* Si fija a P puntualmente se llaman puros

+ h induce una permutación en P
+ $h \sim h'$ son isotópicos si $\exists\ (h_t)_{t \in [0,1]}$ de elementos de $\text{Homeo}^+(D_n)$ tal que $h_0 = h$ & $h_1 = h'$
+ $\text{MCG}(\mathbb{D}_n) = \text{Mod}(\mathbb{D}_n) =$ es el grupo de las clases de isotopías de elementos de $\text{Homeo}^+(\mathbb{D}_n)$
+ $\text{Mod}(\mathbb{D}_n) \curvearrowright \mathcal{A}\,\mathcal{C}$ dónde $\mathcal{A} = \{\text{arcos}\}/\simeq$ $\quad \mathcal{C} = \{\text{curvas}\}/\simeq$
+ giro de Dehn a lo largo de γ

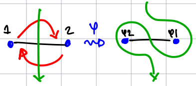


$A = \{Re^{i\theta} \mid 1 \leq R \leq 2 \quad 0 \leq \theta < 2\pi\}$

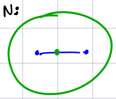
$z_\alpha : A \longrightarrow A$

$Re^{i\theta} \longmapsto Re^{i(\theta - 2\pi R)}$

Semigiro de Dehn



N:



$$f(Re^{i\theta}) = \begin{cases} Re^{i(\theta-\pi)} & R \leq 1/2 \\ Re^{i(\theta-2\pi R)} & R > 1/2 \end{cases}$$

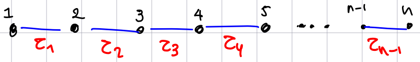
$x \in D_n \quad T_\phi(x) = \begin{cases} \phi^{-1} f \phi & \text{si } x \in N \\ x & \text{si } x \in D \setminus N \end{cases}$

$a \in A$ con $a(0) \neq a(1)$

$h \in \mathrm{Mod}(D_n) \qquad h \cdot a = a_1 \qquad \tau_a = h^{-1} \tau_{a_1} h$

Observación + τ_i^2 es un giro de Dehn alrededor del borde de una vecindad tubular de a

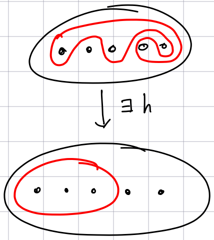
+ Las órbitas de Mod sobre las curvas es un número finito y está completamente determinada por el # puntos "dentro" de la curva.



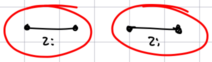
$$B_n = \left\langle \sigma_1 \ldots \sigma_{n-1} \;\middle|\; \begin{array}{ll} \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i & |i-j| \geq 2 \\ \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} & \end{array} \right\rangle \xrightarrow{\cong} \mathrm{Mod}(D_n)$$

$\sigma_i \longmapsto \tau_i$

cambio de coordenadas

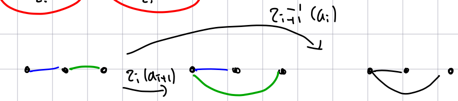


$\tau_i \tau_j$



$\tau_j \tau_i$

$\tau_i \tau_{i+1} \tau_i$



$\tau_i^{-1} \tau_{i+1} \tau_i$ = semitwist alrededor de $\tau_i(a_{i+1})$

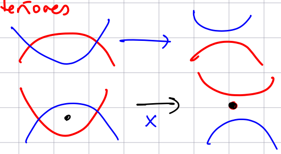
$\tau_{i+1} \tau_i \tau_{i+1}^{-1}$ = semitwist alrededor de $\tau_{i+1}^{-1}(a_i)$

Grafo de Curvas (68-70)

$V(\mathcal{G})$ = curvas

$E(\mathcal{G})$ = $c_1 — c_2 \iff c_1 \cap c_2 = \phi$

- disjuntas si tienen representantes disjuntos y no paralelos
- posición minimal: No hay bígonos sin puntos interiores



Grafo de arcos

$V(G)$ = arcos A

$E(G)$ = $a_1 — a_2$ arcos disjuntos

disjuntos = representantes disjuntos y no paralelos

⇒ pueden coincidir en la frontera =

Graf de Arcos + curvas

$U(G) = A \cup \mathcal{C}$

$E(G)$ = $a_1 — a_2$ si son disjuntos

En D_3, $\mathcal{C}$ es un conjunto de puntos disconexos

+ Estos grafos son localmente infinitos

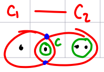
+ Para $n \geq 4$ $\mathcal{C}(D_n)$ es un graf conexo

Sean dos curvas c_1 + c_2 en $\mathcal{C}(D_n)$, $i(c_1, c_2) = \min \#(c_1 \cap c_2)$ ← Par = curvas de Jordan =

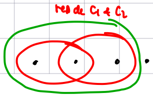
reps de c_1 + c_2

$i(c_1, c_2) = 0 \qquad c_1 — c_2$

$i(c_1, c_2) = 2$



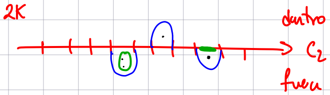
$c_1 — c — c_2$



$i(c_1, c_2) < 2K$ ∃ camino entre c_1 + c_2

$i(c_1, c_2) < 2K$ $\exists$

$i(c_1, c_2) = 2K$



ⓐ Si: $p_i, p_j \in Ext(C_2)$ entonces hay a lo mas $n-2$ puntos en $C_1 \rightsquigarrow C_1'$ salvo —

ⓑ Si p_i, p_j viven en distintas componentes se puede construir una cirugía de la misma manera

ⓒ Si p_i, p_j son interiores a C_1 se invierten los roles del caso ⓐ

Ejercicio concluir esta demostración.

$d(c_1, c_2) :=$ largo minimo de un camino entre C_1 & C_2

Hemos probado que $d(c_1 c_2) \leq \frac{i(c_1, c_2)}{2} + 1$

+ la acción de Mod en $\mathcal{CA}$ es por isometría

Teorema $\mathcal{C}$ es un espacio Gromov-hiperbólico

(para S general) Masur-Minsky)

Nuevas demostraciones: [Przytycki-Hensel-Webb] [Bowditch] [Aougab] [Przytycki-Sisto]

S cerrada sin borde

Q: ¿Se puede adaptar a superficies con borde?

sucede en $\mathcal{C}$

Geometría gruesa

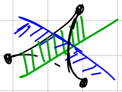
Referencias:
- Bridson-Haefliger
- Bowditch
- Cornaert-Delzant-Papadopolus
- Ghys
- Clara Löh

X grafo métrico,

Geodesica en X entre dos vertices x, y es un camino de x a y que tiene $d(x,y)$ aristas

X es hiperbólico si $\exists\ \delta > 0$ tal que $\forall\ x, y, z$ $\forall$ geodesica $(xy), (yz), (xz)$

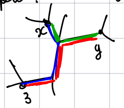
se tiene que $(xy) \subset N_\delta((xz) \cup (yz))$



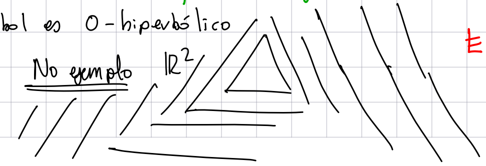
$\iff \exists\ u \in (xz) \cup (yz)\ \ni\ d(v,u) \leq \delta$

Decimos que el triángulo es δ-flaco.

Ejemplo: T árbol es 0-hiperbólico



No ejemplo $\mathbb{R}^2$



El δ es uniforme

No depende del triángulo.

Meta: Mostar que $\mathcal{C}$ es hiperbólico

Casi isometría : $(X,d) \xrightarrow{f} (Y, d_Y)$

es casi-isometría (c.i) ① es un encaje casi-isometrico

$\exists \boxed{C \geq 1 \quad D \geq 0} \ni \forall\ x, x' \in X$ $\boxed{C, D \text{ uniforme}}$

$$\frac{1}{C} d_X(x,x') - D \leq d_Y(fx, fx') \leq C(d_X(x,x') + D$$

② $\exists$ casi inverso $g : Y \longrightarrow X$

ie $d_Y(f \circ g(y), y) \leq C$ $\quad y \in Y$ $\quad \boxed{C \text{ uniforme}}$

$d_X(g \circ f(x), x) \leq C$ $\quad x \in X$

Equivalentemento ① f es un encaje casi isométrico

② $f(X)$ es casi denso en Y, ie $\exists\ c > 0\ \forall y\ \exists x,\ d(fx, y) < C$

Equivalentemente $\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[l, bend left, "g"] \end{tikzcd}$ tiene casi inverso & f, g cumplen ②

Proposición Si X es δ-hiperbólico & $f : X \longrightarrow Y$ es c.i. entonces Y es hiperbólico (con constante dependiendo de δ y de las constantes de la casi-uniformidad)

Teorema (BODWITCH–HAMENDSTANDT, ...) = criterio de hiperbolicidad =

X gráfo, $\forall\ x, y \in X\ \exists\ A(x,y) \subset X$ tal que

(1) $x, y \in A(x,y)$, $A(x,y)$ conexo

(2) $\exists\ h \geq 0 \ni d(x,y) = 1 \Rightarrow \operatorname{diam}(A(x,y)) \leq h$

(3) Los $A(x,y)$ forman triángulos δ-flacos

$\exists\ \delta \geq 0\ \ \forall x, y, z\ \ \forall u \in A(x,y)\ \ \exists\ v \in A(x,z) \cup A(y,z)$

$A(x,y) \subset N_\delta(A(x,u) \cup A(y,u))$ $\qquad \ni d(u,v) \leq \delta$

entonces X es hiperbolico (la constante dependiendo de δ & h)

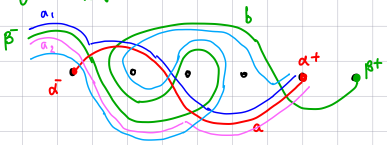
& los $A(x,y)$ son casi geodésicos.

Casi geodesico $\exists\ K \ni d_{Haus}(\text{geo}(x,y), A(x,y)) \leq K$

$d_{Haus}(A,B) = \text{minimo } K \ni \quad A \subset N_K(B) \quad B \subset N_K(A)$

Demostración ($\mathcal{C}$ es hiperbólico)

① $\mathcal{A}$ es hiperbólico:



Unicornio entre a^α, b^β es un arco de extremidades α & β (salvo elección de $\pm$) que sigue una parte de a y luego una parte de b

Fijamos $\alpha = \alpha^+$ & $\beta = \beta^-$ tenemos 4 caminos de unicornios entre a & b

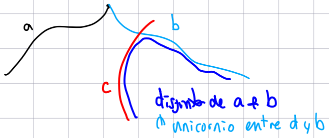
$\Rightarrow$ complejo de arcos es conexo.

$a^+ \; b^+$
$a^- \; b^+$
$a^+ \; b^-$
$a^- \; b^-$

Este proceso es finito al ser el indice finito

$$A(a,b) = u(a^+,b^+) \cup u(a^+,b^-) \cup u(a^-,b^+) \cup u(a^-,b^-)$$

Lema Caminos de unicornios forman triángulos 1-flacos



$\Longrightarrow \mathcal{A}$ es hiperbólico

$\mathcal{AC}$ = {arcos} ∪ {curvas}

Afirmación $\mathcal{AC}$ es hiperbólico

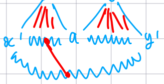
$B(x,y)$ $\quad U(x) = \begin{cases} \{x\} & x \text{ es arco} \\ \{\text{todos los arcos disjuntos de } x\} & x \text{ es curva} \end{cases}$

$$B(x,y) = \bigcup_{\substack{x' \in U(x) \\ y' \in U(y)}} A(x',y') \cup \{x,y\}$$

① $B(x,y)$ conexo $\quad x,y \in B(x,y)$

③ $B(x,y)$ triangulos 1-flacos

② S: x — y curvas disjuntas



$\Rightarrow \operatorname{Diam}(B(x,y)) \leq 5$

Afirmación

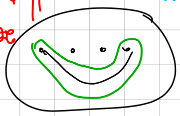
$$\begin{tikzcd} \mathcal{AC} \arrow[r, shift left, "\varphi"] & \mathcal{C} \arrow[l, shift left] \arrow[l, bend right=60, "\eta"'] \end{tikzcd}$$

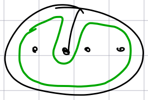
c $\quad$ c

$c \longmapsto c$

$a \longmapsto c(a) = \partial N(a) \cup \partial N(\partial D)$

$$\boxed{\begin{array}{l} \varphi \cdot \eta = \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \\ \eta \cdot \varphi \underset{\text{g:}}{\sim} \mathrm{Id}_{\mathcal{AC}} \end{array}}$$





((**Masur - Minsky**)) $\quad d_{\mathcal{C}}(\varphi x, \varphi y) \leq 2\, d_{\mathcal{AC}}(x,y)$

Sesion 2.

+ Un espacio acotado es hiperbólico.

+ Un espacio metrico es acotado $\Longleftrightarrow$ es casi isometrico a un punto.

El ser hiperbólico es interesante por que se pueden extender algunos resultados de la parte dinámica al caso algebraico

Grupos de Artin-Tits

$$B_n = \left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \;\middle|\; \begin{matrix} \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i & |i-j| \geq 2 \\ \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} & \end{matrix} \right\rangle$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & & 2 \\ 3 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 3 \\ 2 & & 3 & 1 \end{pmatrix} = M(B_n)$$

Grupos de Artin - Tits

$$\left\langle S \;\middle|\; \underbrace{sts}_{\substack{m_{st} \\ \text{largo } m_{st}}} = \underbrace{tsts\cdots}_{\substack{m_{st} \\ \text{largo } m_{st}}} \quad s \neq t \right\rangle = A$$

(A de grupos de Artin)

Vamos a considerar S finito.

Matriz de Coxeter $M = (m_{st})_{s,t \in S^2}$ $\quad m_{st} \in \{1, 2, 3, \dots, \infty\}$ simétrica, $m_{ss} = 1$

Si $m_{st} = \infty$ no hay relación entre s y t

Si $m_{st} = 2$ $\quad st = ts$, ie $s \rightleftarrows t$

Grafo de Coxeter

Vertices $\longleftrightarrow S$

Aristas con etiqueta $\longleftrightarrow$ $s \bullet\!\!\xrightarrow{m_{st}}\!\!\bullet\, t$ $\quad m_{st} \geq 3$; cuando $m_{st} = 3$ no ponemo etiqueta "por convención"

$$A / \langle\langle s^2 \rangle\rangle = \left\langle S \;\middle|\; \underbrace{st\cdots}_{m_{st}} = \underbrace{ts\cdots}_{m_{st}},\ s^2 = 1 \right\rangle = W$$

(W de grupos de Weyl)

Hay un morfismo natural $A \overset{\theta}{\twoheadrightarrow} W$, en el caso de trenzas $B_n \overset{\theta}{\twoheadrightarrow} S_n$ y $\operatorname{Ker}\theta = P_n =$ "Pure mapping class group de D_n"

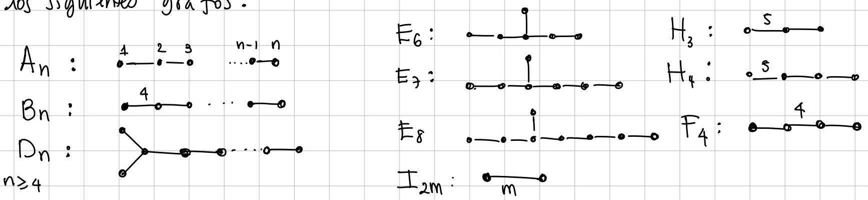
Si W es finito, A se llama de tipo finito (o de tipo esférico).

Hay muy pocos resultados para los grupos de Artin en general, sin embargo para los grupos de Artin—Tits de tipo esférico hay muchos resultados interesantes.

Si el gráfo es conexo, A se dice irreducible. Notemos que es equivalente a no poder expresarlo como producto directo

Teorema (Coxeter)

Si A es un grupo de Artin de tipo finito, entonces A está dado por uno de los siguientes gráfos:



Lema (Matsumoto) ① Una palabra reducida en W es una palabra de largo minimo en S

② Dos palabras reducidas en W son equivalentes $\Leftrightarrow$ Podemos pasar de una a otra mediante conmutación & relaciones de trenzas

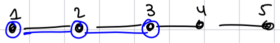
$\Rightarrow$

$$\begin{tikzcd} & \langle\langle s^2 \rangle\rangle \arrow[d, equal] & & & \\ 1 \arrow[r] & CA \arrow[r] & A \arrow[r, "\pi"] & W \arrow[r] \arrow[l, bend left, "s"] & 1 \end{tikzcd}$$

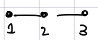
⚠ z no es un morfismo de grupos, por lo tanto no es un producto semidirecto.

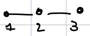
Subgrupo Parabólico estándar $\langle X \rangle$, $X \subset S$

Ejemplo



$X = \{1,2,3\} \subset \{1,2,3,4,5\} = S$

$A_X = A($  $)$

$W_X = W($  $)$

Teo (Van der Lek)

$A_X = A(\Gamma_X)$

donde Γ_X es la subgráfica generada por X

Subgrupo parabólico $\exists$ $A_X < A$ estándar & $\alpha \in A$ $\ni$ $P = \alpha^{-1} A_X \alpha$

$W_X < W$ " & $w \in W$ $\ni$ $P_W = w^{-1} W_X w$

Estructura de Garside

A es de tipo finito (ie W es finito)

Garside '69 // Brieskorn - Saito '72

A^+ = monoide dado por la misma presentación que A

(de hecho se considera el monoide generado por los generadores de A y Luis Paris demostró que admite exactamente la misma presentación que tiene A pero como monoide)

largo de A^+, $l : A^+ \longrightarrow \mathbb{N}$ morfismo $l(s) = 1$ $\forall s \in S$ & $l(1) = 0$

Se define una relación de $\overline{\text{orden}}$ en A

no eq. — $a \leq b$ si existe $c \in A^+$ tal que $b = ac$: orden prefijo
$b \geq a$ si existe $c \in A^+$ tal que $b = ca$: orden sufijo

$a \leq b \Rightarrow da \leq db \quad \forall\, d \in A^+$
$a \geq b \Rightarrow ad \geq bd \quad \forall\, d \in A^+$

Teorema (Garside $^{B_n^+}$, Brieskorn-Saito $^{A^+ \text{ esférico}}$) : $\leq$ y $\geq$ son retículas de A^+.

$d = \text{MCD}(a,b) = a \wedge b$
$m = \text{mcm}(a,b) = a \vee b$

Corolario. $A^+ \longrightarrow A$ es inyectiva
$s \longmapsto s$

Recordemos la sección $\sigma : W \longrightarrow A$, notemos que $\sigma(w) \in A^+$
para $g \in A^+$ los siguientes resultados son equivalentes
- ⊕ g está en la imágen de σ
- ⊕ $l(g) = l(\theta(g))$
- ⊕ g se escribe sin cuadrados

Cuando W es finito $\exists!\, w_0 \in W$ de largo máximo.
Llamaremos $\Delta = \sigma(w_0)$

Δ es el mínimo común múltiplo de $\sigma(W)$, respecto a los dos ordenes $\leq$ y $\geq$

$\sigma(W) = \{\text{prefijos de } \Delta\} = \{\text{sufijos de } \Delta\}$

llamamos a $\sigma(W)$ el conjunto de elementos simples

(A, A^+, Δ) estructura de Garside — Foundations of Garside Theory = Dehornoy et al.
- Monoide
- elemento especial del monoide
- orden $\leq$, $\geq$ son retículas
- prefijos / sufijos de Δ generan A

- Problema de la palabra y conjugación $\Leftarrow$ Formas normales

Forma normal (a la izquierda) Dado $x \in A^+$ existe una única descomposición $x = x_1 \cdots x_k$ con x_i simple $x_1, \dots, x_k \neq 1$ y cada par de factores es ponderado a la izquierda

$$x_i = (x_i x_{i+1}) \wedge \Delta$$

Notemos que A es el grupo de fracciones de A^+

$\Rightarrow$ $x = n^{-1} p$ con $p, n \in A^+$ & $p \wedge n = 1$

Tomando formas normales de p & n induce una forma normal en x esto es llamada forma normal fraccionaria

Charney Davis: la forma PN es una geodésica en $\mathrm{Cay}(A)_{\mathcal{S}(W)}$

Brieskorn - Saito: $Z(A) \in \{\langle \Delta \rangle, \langle \Delta^2 \rangle\}$

Hay una permutación involutiva $f : S \to S$ dada por $s\Delta = \Delta f(s)$

Algunos resultados:

$A_X \subset A$ parabólico estandar

$\exists\ \Delta_X \in A_X$, Δ_X o Δ_X^2 central

P parabólico $\rightsquigarrow$ z_P elemento central de Garside

(Cumplido, Gonzalez-Meneses, Gebhardt, West) Si queremos estudiar grupos parabólicos basta estudiar estos centralizadores

Teorema $\alpha^{-1} P \alpha = Q \iff \alpha^{-1} z_P \alpha = z_Q$

- $P = Q \Rightarrow N_A(P) = Z_A(z_P)$

fuertemente basado en Godelle: Normalisateurs de sousgroupes paraboliques de groupes de A-T.

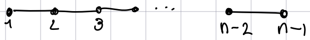
P es estándar $\iff$ z_P es positivo

Estandarizador de P

(Cumplido) Existe un estandarizador mínimo positivo es n si $z_P = pn^{-1}$

Hecho: Si $z_p z_Q = z_Q z_p$ entonces existe un elemento α tal que $\{\alpha^{-1} p \alpha, \alpha^{-1} q \alpha\}$ son estándar

Ejemplo

A_{n-1} :


$A(A_{n-1}) = B_n$ $\quad W(A_{n-1}) = S_n$

el elemento más largo en S_n es quien mas intercambio de parejas hace

$$w_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ n & n-1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$w_0 = ((12)(23)\cdots(n-1,n))((12)\cdots(n-2,n-1))\cdots((12)(23))((12))$

$f(w_0) = (\sigma_1 \cdots \sigma_{n-1})(\sigma_1 \cdots \sigma_{n-2}) \cdots (\sigma_1\sigma_2)(\sigma_1)$

Δ_4


Δ^2 : twist de Dehn en el borde de $\mathbb{D}^2$

$f(\sigma_i) = \sigma_i \Delta = \Delta \sigma_{n-i}$

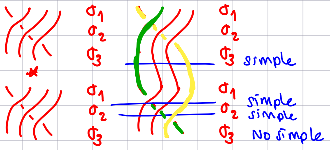
Δ no es central $\Longleftarrow$ $f : \sigma_i \longmapsto \sigma_{n-i}$

Δ^2 es central

¿Cómo se ven los elementos de $\mathcal{S}(S_n)$?

los elementos simples: trenzas positivas cuyas cuerdas se cruzan a lo mas una vez

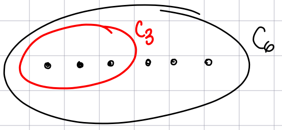
GAP: Groups Algorithms Programing



Subgrupo parabolico estándar irreducible

$\updownarrow$

Grupo de cuerdas con menos cuerdas



Mapping class group con soporte en el interior de C_3 son trenzas sobre las 3 primeras cuerdas

$\updownarrow$

$A_{\{1,2\}} = \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle < B_6 = A(A_5)$ (el elemento central de Garside es el twist de Dehn alrededor de C_3)

Cuando C es una curva arbitraria C $\exists\ \alpha \in B_n$ tal que $\alpha \cdot C = C_m$ con $2 \leq m \leq n-1$

y corresponde al grupo de trenzas $(\mathrm{mod}(\mathbb{D}_n))$ que tiene soporte dentro de C_6

$P \longleftrightarrow \mathrm{Mod}(\mathbb{D}_n)$ con soporte en $C_6 \longleftrightarrow C_6$

$\{$curvas$\} \longleftrightarrow \{$subgrupos parabólicos irreducibles$\}$

Para A de tipo finito

Grafo de subgrupos parabólicos irreducibles $\mathcal{P}$

$V(\mathcal{P}) = \{$ subgrupos parabólicos irreducibles $\}$

$E(\mathcal{P}) = \{ P — Q \iff z_P z_Q = z_Q z_P \}$

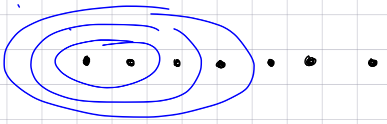
$$\boxed{\text{Conjetura: } \mathcal{P} \text{ es hiperbólico}}$$

$PS(A)$ Gráfo de subgrupos parabólicos irreducibles

Cuándo $A = B_n$ entonces $PS(A) \longrightarrow \mathcal{C}(D_n)$

<u>Prop</u> Si $z_P z_Q = z_P z_Q$ entonces existe $g \in A$ talque $g^{-1}Pg$, $g^{-1}Qg$ son estándar.

Electrificación de $Cay(A, \text{simples})$ respecto a los cosets de $N_A(\mathring{P}_i)$ donde $\{\mathring{P}_i\}$ familia (finita) de subgrupos parabólicos estándar que representan a clases de conjugación (ie estabilizadores de $A \curvearrowright PS$)



<u>Def</u> La electrificación de $Cay(A, \text{simple})$ respecto a $N_A(\mathring{P}_i)$ es es $\mathcal{G} = Cay \cup \{$aristas adicionales$\}$

$g \bullet\!\!—\!\!\bullet\, h$ si: $g^{-1}h$ es simple
$g^{-1}h \in N_A(\mathring{P}_i)$

Teo $\mathcal{G} \underset{q.i}{\simeq} PS$

<u>Dem</u> ⊕ $PS \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G}$

$P \longmapsto g$ tal que $g * \mathring{P}_i = P$ $($si $h * \mathring{P}_i = P \Rightarrow g^{-1}h \in N_A(\mathring{P}_i))$

⊕ $\mathcal{G} \xrightarrow{\psi} PS$

$g \longmapsto \underbrace{\{g * \mathring{P}_i\}}_{\text{esto tiene diámetro acotado}}$

Resta ver que $d_{\mathcal{G}}(\varphi(P), \varphi(Q)) \leq A\, d_{PS}(P, Q) + B$

$d_{PS}(\psi(g_1), \psi(g_2)) \leq A\, d_{\mathcal{G}}(g_1, g_2) + B$

P —— Q $\sim$ $z_P z_Q = z_Q z_P$

$\exists\ \mathring{P}, \mathring{Q}$ 4 $g \in A$ tal que $g * \mathring{P} = P$ $\quad \mathring{P} = g_1 * \mathring{P}_{i_1}$

$g * \mathring{Q} = Q$ $\quad \mathring{P} = g_2 * \mathring{P}_{i_2}$] donde estos son parte de la familia escogida al inicio

Para cada estándar $\mathring{P}$ (recordemos hay un número finito)

escoger un $g \in A$ $\ni$ $g * P_i = \mathring{P}_1$

Hay una cota uniforme B sobre todos estos g's.

$\overset{P_{i,1}}{\circ}\overset{[0,1]}{\text{———}}\overset{\mathring{P}}{\circ}\underset{g}{\text{———}}\overset{P}{\circ}$ $\quad \varphi(P) = g g_1$

$\varphi(P)^{-1}\varphi(Q) = g_1^{-1} g_2$

tiene a lo más largo 2B

$\Rightarrow$ la primera desigualdad.

Si g —— gs entonces $\varphi(gs) = \{gs * \mathring{P}_i\}$

$\varphi(g) = \{g * \mathring{P}_i\}$

$\Rightarrow$ $d(\varphi(gs), \varphi(g))$ es acotado

Si g —— gz entonces $\varphi(gz) = \{gz * \mathring{P}_i\}$ || los dos elementos intersecan ¿cómo?

$\varphi(g) = \{g * \mathring{P}_i\}$ || y luego se cumple la segunda desigualdad

Proceso de electrificar (conificar — cone off)

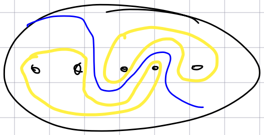
= cone off along parabolic subgroups =

$C_{cops} = \text{Cayley}\left(A, \begin{matrix} \text{simples} \\ \text{- elementos en subgrupos} \\ \text{parab. irred. estándar} \end{matrix}\right)$

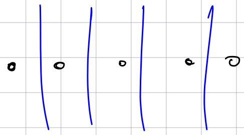
Si $A = B_n$ $\qquad C_{cops} \overset{q.i}{\text{————}}$ Arcos con sus extremidades en los bordes.

$\Rightarrow$ $C_{cops}(B_n)$ es hiperbólico

Conjetura. $C_{cops}(A)$ es hiperbólico para todo A



curva arbitraria



familia distinguida

$C_{cops} \xrightarrow[\cancel{q.i}]{lip} PS$

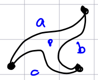
Trabajo en conjunto con Bert Wiest

$\mathcal{C}(\mathbb{D}_n)$, c_0 punto base $x = x_1 \cdots x_r$ forma normal a la izquerda

c_0, $x_1 * c_0$, $x_1 x_2 * c_0$, …., $x_1 \cdots x_r \cdot c_0$

Pregunta 1: ¿es este camino geodésico?

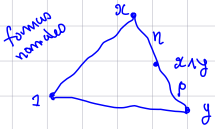
Espacio hiperbólico



Para todo triángulo geodésico existe un δ-centro uniforme

($\exists$ 'p' a distancia δ-uniforme de a,b,c)

Pregunta 2: Dado $1, x, y \in B_n$ ¿dónde viene el δ-centro del triángulo $A(1,x)$, $A(x,y)$, $A(1,y)$?



triángulo geodésico en Cayley (A, simples)

"Respuesta" Debería ser $x \wedge y$

Def $y \in B_n$ es absorbible si

(1) $FN(y)$ no tiene Δ

(2) $\exists$ x cuya forma normal $\Delta^p x_1 \cdots x_R$

talque $FN(xy) = \Delta^p z_1 \cdots z_R$ (es decir no cambia el largo)

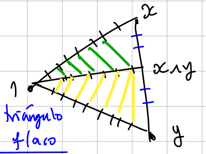
Hecho: Una subpalabra de una palabra absorbible es absorbible

Complejo de longitudes adicionales

$$\mathcal{C}_{AL} = \mathrm{Cay}\left(A, \begin{matrix}\text{simples}\\ \text{absorbibles}\end{matrix}\right)$$

Teo $\mathcal{C}_{AL}$ satisface las dos propiedades de la pregunta (1) & (2)

① Las FN satisfacen el criterio de hiperbolicidad



es un triángulo 1 o 2 flaco

$x = x_1 \cdots x_n$ $y = y_1 \cdots y_m$ $x \wedge y = z_1 \cdots z_p$

$x_1 = \mathrm{MCD}(\Delta, y) = \Delta \wedge y$ $\cdots \cdot (x_1 \cdots x_i) = \Delta^i \wedge x$

$\Rightarrow$ $z_1 \cdots z_i = \Delta^i \wedge (x \wedge y)$

$z_1 \cdots z_i \leq \Delta_n^i x = x_1 \cdots x_i$

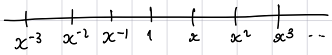
El problema es que los elementos absorbibles NO son bien comprendidos (son muy complejos)

Veamos que $\mathcal{C}_{AL}$ tiene diametro infinito

+ construir un elemento que actúa loxodrómicamente

(basado en el estudio del retículo de los simples & de una acción transitiva de ciertas formas normales)

x no es absorbible, es rigido



Existe una proyección $\mathcal{C}_{AL} \xrightarrow{\lambda} \mathbb{Z} = \langle x \rangle$ tal que si $|\lambda(z_1) - \lambda(z_2)| \geq 3$ entonces $A(z_1, z_2)$ pasa por $A(x^{\lambda(z_1)+1}, x^{\lambda(z_2)-1})$

(esta propiedad no se adapta a cualquier pseudo-Anosov, se construye el elemento de una manera muy específica)

Afirmación: $d(1, x^N) \geq N/2$ [en caso contrario $d(1,x^N) = K < \frac{N}{2} \Rightarrow |\lambda(v_1) - \lambda(v_{i+1})| < 1$

$A(v_i, v_{i+1})$ "contiene una copia de x"

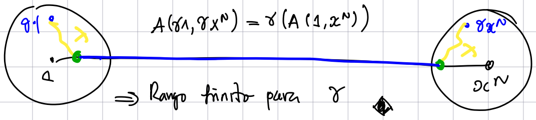
Afirmación x es debilmente propiamente discontinuo.

$\forall K \; \exists N$ tal que $\left\{ \gamma : \begin{array}{l} d(1, \gamma 1) \leq K \\ d(x^N, \gamma x^N) \leq K \end{array} \right\}$ es finito.

Lema 1. $\lambda : \mathcal{C}_{AL} \longrightarrow \{x^K, K \in \mathbb{Z}\}$ es Lipschitz

$$d\left(x^{\lambda(z_1)}, x^{\lambda(z_2)}\right) \leq M \, d(z_1, z_2)$$

$A(\gamma 1, \gamma x^N) = \gamma(A(1, x^N))$



$\Rightarrow$ Rango finito para γ ◆

OSIN: G actúa con un elemento loxodrómico Debilmente propiamente discontinua en un espacio hiperbolico

$\Longleftrightarrow$ G es acilindricamente hiperbólico

$\therefore$ $A/_{ZA}$ es acilindricamente hiperbólico

¿ La acción de A en $\mathcal{C}_{AL}$ es acilindrico ?

PS $\longrightarrow \mathcal{C}_{AL}$ Lipschitz sobre

identidad en los vértices de Cay (A)

(cumplido | Antolin) Elementos que preservan una curva redonda (normalizadores de parabólicos estándar) se pueden escribir como productos de lo más 9 elementos absorbibles

$\Longrightarrow$ PS $\longrightarrow \mathcal{C}_{AL}$ es 9 - Lipschitz.

⊕ QISO ($\mathcal{C}_{AL}(A)$)

⊕ Aplicación en otros contextos

$\therefore$ ⊕ PS tiene diametro infinito

⊕ Trenzas reducibles actuan de manera eliptica en $\mathcal{C}_{AL}$

⊕ Conjetura $\mathcal{C}_{AL} \xleftrightarrow[q.i]{} PS$

$\Rightarrow$ Todos los pA actúan loxodromicamente en $\mathcal{C}_{AL}$

⊕ Genericidad en G: caminata aleatoria || bola en grafo Cay con medida uniforme y escoger uno al azar

SISTO (cumplido): doxodromicos son genéricos (B_r, $r \to \infty$, $P(\text{lox} \in B_R) \xrightarrow[R \to \infty]{} 1$