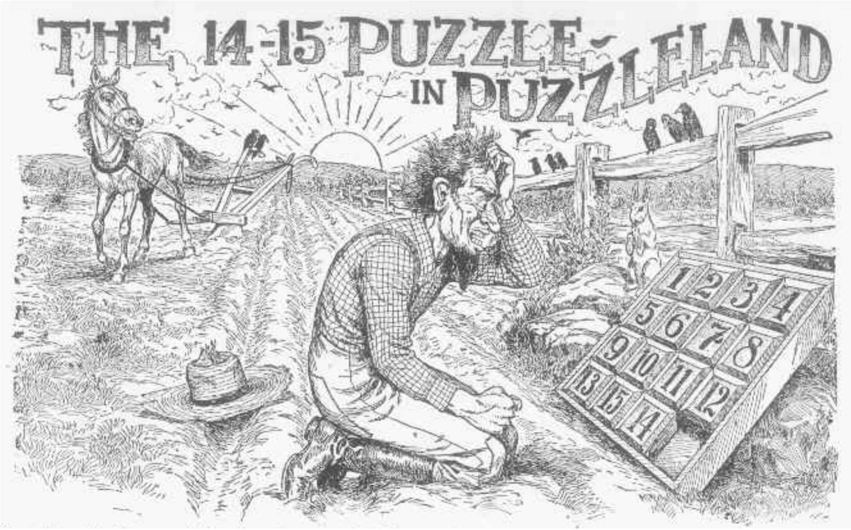
Simetría, grupos, juegos

Matthieu Calvez

Universidad de La Frontera, Departamento de Matemática y Estadística
Charla para profesores

Diciembre 2018


THE 14-15 PUZZLE IN PUZZLELAND
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
15
14

El juego del 15

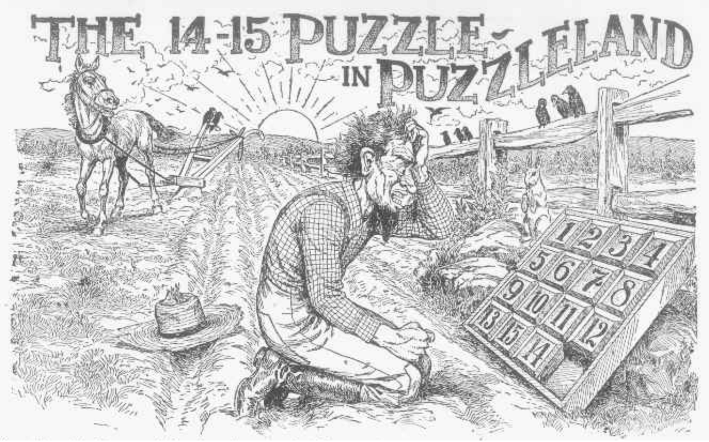
- Inventado por Noyes Palmer Chapman, 1874.

El juego del 15

- Inventado por Noyes Palmer Chapman, 1874.
- se expandió rápidamente en EEUU, Canada y Europa, alcanzando un periodo de locura durante el 1880.

El juego del 15

- Inventado por Noyes Palmer Chapman, 1874.
- se expandió rápidamente en EEUU, Canada y Europa, alcanzando un periodo de locura durante el 1880.
- Sam Loyd afirmó falsamente en 1891 ser el inventor del juego y ofreció 1000 dólares para resolver la siguiente configuración:


THE 14-15 PUZZLE
IN PUZZLELAND

Había sido demostrado en 1879 que eso era imposible!!!

Había sido demostrado en 1879 que eso era imposible!!!

Objetivo 1. Demostrar eso.

“La matemática es el arte de dar el mismo nombre a cosas distintas”.

“La matemática es el arte de dar el mismo nombre a cosas distintas”.

“La matemática es el arte de dar el mismo nombre a cosas distintas”.

Henri Poincaré (1854-1912).

“La matemática es el arte de dar el mismo nombre a cosas distintas”.

Henri Poincaré (1854-1912).

À ce moment, je quittai Caen, où j’habitais alors, pour prendre part à une course géologique entreprise par l’École des Mines. Les péripéties du voyage me firent oublier mes travaux mathématiques ; arrivés à Coutances, nous montâmes dans un omnibus pour je ne sais quelle promenade. Au moment où je mettais le pied sur le marchepied, **l’idée me vint, sans que rien dans mes pensées antérieures parût m’y avoir préparé**, que les transformations dont j’avais fait usage pour définir les fonctions fuchsiennes étaient identiques à celles de la géométrie non euclidienne [hyperbolique]. Je ne fis pas la vérification, je n’en aurais pas eu le temps, puisque, à peine assis dans l’omnibus, je repris la conversation commencée, **mais j’eus tout de suite une entière certitude**. De retour à Caen, je vérifiai le résultat à tête reposée pour l’acquit de ma conscience.

“La matemática es el arte de dar el mismo nombre a cosas distintas”.

“La matemática es el arte de dar el mismo nombre a cosas distintas”.

Objetivo 2. Explicar un poco.

Simetría, grupos, juegos

Matthieu Calvez

Universidad de La Frontera, Departamento de Matemática y Estadística
Charla para profesores

Diciembre 2018

Simetrías de una figura:

Simetrías de una figura:

transformaciones del espacio que dejan invariante la figura.

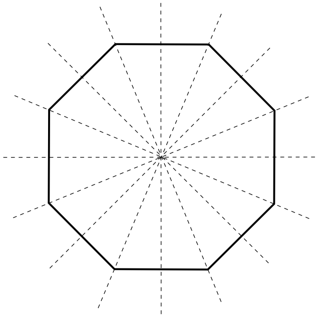
Triángulo equilatero

Triángulo equilatero

6 simetrías

Id, Rot_{120}, Rot_{240}, Ref_1 Ref_2, Ref_3.

Octogono regular. 16 simetrías.



Operación –o composición– entre simetrías de una figura: realizar una tras otra

Operación –o composición– entre simetrías de una figura: realizar una tras otra

Ej. $(Rot_{120}) \star (Rot_{120})=$

Operación –o composición– entre simetrías de una figura: realizar una tras otra

Ej. $(Rot_{120}) \star (Rot_{120}) = Rot_{240}$

Operación –o composición– entre simetrías de una figura: realizar una tras otra

Ej. $(Rot_{120}) \star (Rot_{120}) = Rot_{240}$

Ej. $(Rot_{120}) \star (Rot_{240}) =$

Operación –o composición– entre simetrías de una figura: realizar una tras otra

Ej. $(Rot_{120}) \star (Rot_{120}) = Rot_{240}$

Ej. $(Rot_{120}) \star (Rot_{240}) = Id$

Operación –o composición– entre simetrías de una figura: realizar una tras otra

Ej. $(Rot_{120}) \star (Rot_{120}) = Rot_{240}$

Ej. $(Rot_{120}) \star (Rot_{240}) = Id$

Ej. $(Rot_{120}) \star (Ref_2) =$

Operación –o composición– entre simetrías de una figura: realizar una tras otra

Ej. $(Rot_{120}) \star (Rot_{120}) = Rot_{240}$
Ej. $(Rot_{120}) \star (Rot_{240}) = Id$
Ej. $(Rot_{120}) \star (Ref_2) = (Ref_3)$

Operación –o composición– entre simetrías de una figura: realizar una tras otra

Ej. $(Rot_{120}) \star (Rot_{120}) = Rot_{240}$

Ej. $(Rot_{120}) \star (Rot_{240}) = Id$

Ej. $(Rot_{120}) \star (Ref_2) = (Ref_3)$

Ej. $(Ref_1) \star (Ref_2) =$

Operación –o composición– entre simetrías de una figura: realizar una tras otra

Ej. $(Rot_{120}) \star (Rot_{120}) = Rot_{240}$

Ej. $(Rot_{120}) \star (Rot_{240}) = Id$

Ej. $(Rot_{120}) \star (Ref_2) = (Ref_3)$

Ej. $(Ref_1) \star (Ref_2) = (Rot_{240})$

Operación –o composición– entre simetrías de una figura: realizar una tras otra

Ej. $(Rot_{120}) \star (Rot_{120}) = Rot_{240}$
Ej. $(Rot_{120}) \star (Rot_{240}) = Id$
Ej. $(Rot_{120}) \star (Ref_2) = (Ref_3)$
Ej. $(Ref_1) \star (Ref_2) = (Rot_{240})$

$\star$	Id	Rot_{120}	Rot_{240}	Ref_1	Ref_2	Ref_3
Id	Id	Rot_{120}	Rot_{240}	Ref_1	Ref_2	Ref_3
Rot_{120}	Rot_{120}	Rot_{240}	Id	Ref_2	Ref_3	Ref_1
Rot_{240}	Rot_{240}	Id	Rot_{120}	Ref_3	Ref_1	Ref_2
Ref_1	Ref_1	Ref_3	Ref_2	Id	Rot_{240}	Rot_{120}
Ref_2	Ref_2	Ref_1	Ref_3	Rot_{120}	Id	Rot_{240}
Ref_3	Ref_3	Ref_2	Ref_1	Rot_{240}	Rot_{120}	Id

Operación –o composición– entre simetrías de una figura: realizar una tras otra

Ej. $(Rot_{120}) \star (Rot_{120}) = Rot_{240}$
Ej. $(Rot_{120}) \star (Rot_{240}) = Id$
Ej. $(Rot_{120}) \star (Ref_2) = (Ref_3)$
Ej. $(Ref_1) \star (Ref_2) = (Rot_{240})$

$\star$	Id	Rot_{120}	Rot_{240}	Ref_1	Ref_2	Ref_3
Id	Id	Rot_{120}	Rot_{240}	Ref_1	Ref_2	Ref_3
Rot_{120}	Rot_{120}	Rot_{240}	Id	Ref_2	Ref_3	Ref_1
Rot_{240}	Rot_{240}	Id	Rot_{120}	Ref_3	Ref_1	Ref_2
Ref_1	Ref_1	Ref_3	Ref_2	Id	Rot_{240}	Rot_{120}
Ref_2	Ref_2	Ref_1	Ref_3	Rot_{120}	Id	Rot_{240}
Ref_3	Ref_3	Ref_2	Ref_1	Rot_{240}	Rot_{120}	Id

- Neutro

Operación –o composición– entre simetrías de una figura: realizar una tras otra

Ej. $(Rot_{120}) \star (Rot_{120}) = Rot_{240}$

Ej. $(Rot_{120}) \star (Rot_{240}) = Id$

Ej. $(Rot_{120}) \star (Ref_2) = (Ref_3)$

Ej. $(Ref_1) \star (Ref_2) = (Rot_{240})$

$\star$	Id	Rot_{120}	Rot_{240}	Ref_1	Ref_2	Ref_3
Id	Id	Rot_{120}	Rot_{240}	Ref_1	Ref_2	Ref_3
Rot_{120}	Rot_{120}	Rot_{240}	Id	Ref_2	Ref_3	Ref_1
Rot_{240}	Rot_{240}	Id	Rot_{120}	Ref_3	Ref_1	Ref_2
Ref_1	Ref_1	Ref_3	Ref_2	Id	Rot_{240}	Rot_{120}
Ref_2	Ref_2	Ref_1	Ref_3	Rot_{120}	Id	Rot_{240}
Ref_3	Ref_3	Ref_2	Ref_1	Rot_{240}	Rot_{120}	Id

- Neutro La no-transformación

Operación –o composición– entre simetrías de una figura: realizar una tras otra

Ej. $(Rot_{120}) \star (Rot_{120}) = Rot_{240}$
Ej. $(Rot_{120}) \star (Rot_{240}) = Id$
Ej. $(Rot_{120}) \star (Ref_2) = (Ref_3)$
Ej. $(Ref_1) \star (Ref_2) = (Rot_{240})$

$\star$	Id	Rot_{120}	Rot_{240}	Ref_1	Ref_2	Ref_3
Id	Id	Rot_{120}	Rot_{240}	Ref_1	Ref_2	Ref_3
Rot_{120}	Rot_{120}	Rot_{240}	Id	Ref_2	Ref_3	Ref_1
Rot_{240}	Rot_{240}	Id	Rot_{120}	Ref_3	Ref_1	Ref_2
Ref_1	Ref_1	Ref_3	Ref_2	Id	Rot_{240}	Rot_{120}
Ref_2	Ref_2	Ref_1	Ref_3	Rot_{120}	Id	Rot_{240}
Ref_3	Ref_3	Ref_2	Ref_1	Rot_{240}	Rot_{120}	Id

- Neutro La no-transformación
- Inversos

Operación –o composición– entre simetrías de una figura: realizar una tras otra

Ej. $(Rot_{120}) \star (Rot_{120}) = Rot_{240}$
Ej. $(Rot_{120}) \star (Rot_{240}) = Id$
Ej. $(Rot_{120}) \star (Ref_2) = (Ref_3)$
Ej. $(Ref_1) \star (Ref_2) = (Rot_{240})$

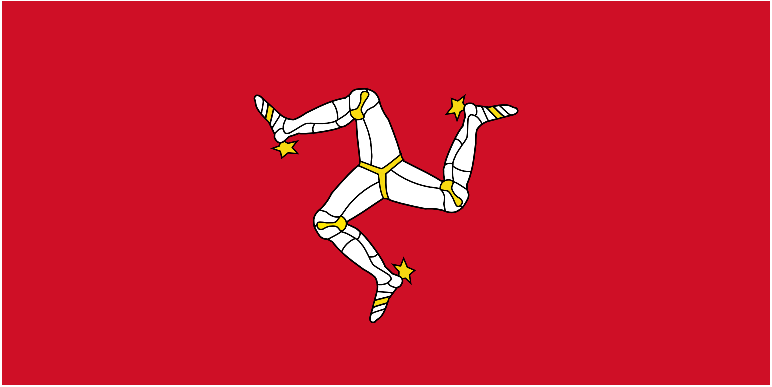
$\star$	Id	Rot_{120}	Rot_{240}	Ref_1	Ref_2	Ref_3
Id	Id	Rot_{120}	Rot_{240}	Ref_1	Ref_2	Ref_3
Rot_{120}	Rot_{120}	Rot_{240}	Id	Ref_2	Ref_3	Ref_1
Rot_{240}	Rot_{240}	Id	Rot_{120}	Ref_3	Ref_1	Ref_2
Ref_1	Ref_1	Ref_3	Ref_2	Id	Rot_{240}	Rot_{120}
Ref_2	Ref_2	Ref_1	Ref_3	Rot_{120}	Id	Rot_{240}
Ref_3	Ref_3	Ref_2	Ref_1	Rot_{240}	Rot_{120}	Id

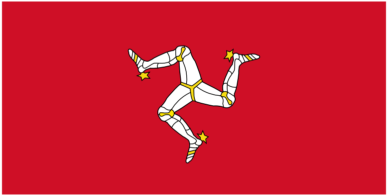
- Neutro La no-transformación
- Inversos Deshacer la transformación

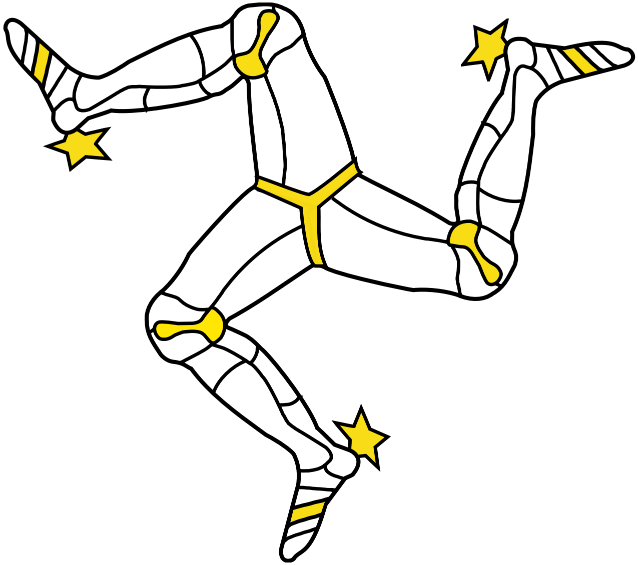
Definición

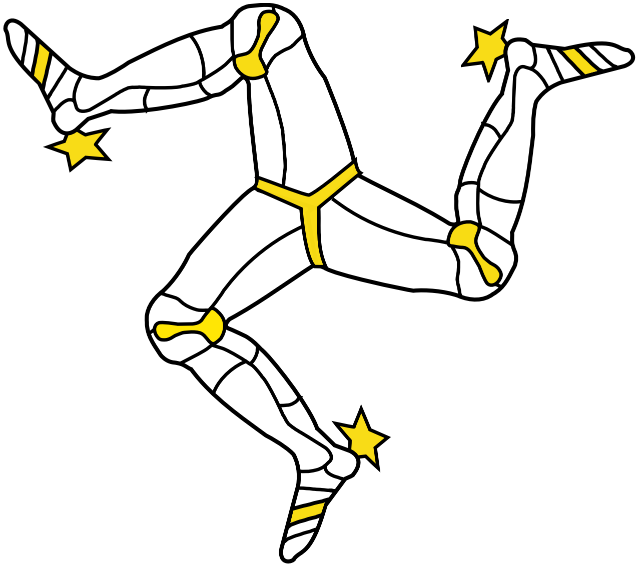
(1882) Un grupo es un conjunto equipado con una operación interna $\star$ que cumple:

- $\star$ *es asociativa*
- *existe un elemento neutro*
- *todo elemento tiene un inverso*

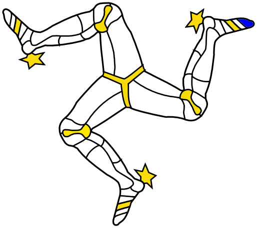




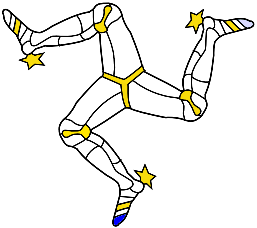




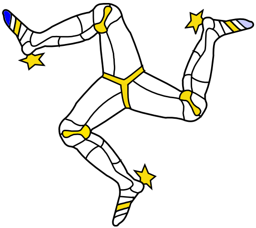
Dibujo de la bandera de la Isla de Man: 3 simetrías.



Id



r_1



r_2

$\star$	Id	r_1	r_2
Id			
r_1			
r_2			

$\star$	Id	r_1	r_2
Id	Id		
r_1			
r_2			

$\star$	Id	r_1	r_2
Id	Id	r_1	
r_1			
r_2			

$\star$	Id	r_1	r_2
Id	Id	r_1	r_2
r_1			
r_2			

$\star$	Id	r_1	r_2
Id	Id	r_1	r_2
r_1	r_1		
r_2			

$\star$	Id	r_1	r_2
Id	Id	r_1	r_2
r_1	r_1		
r_2	r_2		

$\star$	Id	r_1	r_2
Id	Id	r_1	r_2
r_1	r_1	r_2	
r_2	r_2		

$\star$	Id	r_1	r_2
Id	Id	r_1	r_2
r_1	r_1	r_2	Id
r_2	r_2		

$\star$	Id	r_1	r_2
Id	Id	r_1	r_2
r_1	r_1	r_2	Id
r_2	r_2	Id	

$\star$	Id	r_1	r_2
Id	Id	r_1	r_2
r_1	r_1	r_2	Id
r_2	r_2	Id	r_1

Números enteros modulo 3: restos posibles de la división por 3:

Números enteros modulo 3: restos posibles de la división por 3:

$$\{0, 1, 2\}$$

Números enteros modulo 3: restos posibles de la división por 3:

$$\{0, 1, 2\}$$

Operación suma:

Números enteros modulo 3: restos posibles de la división por 3:

$$\{0, 1, 2\}$$

Operación suma:

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

$$\xrightarrow[1 \rightsquigarrow r_1 ; 2 \rightsquigarrow r_2]{0 \rightsquigarrow Id}$$

$\star$	Id	r_1	r_2
Id	Id	r_1	r_2
r_1	r_1	r_2	Id
r_2	r_2	Id	r_1

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

$$\xrightarrow[1 \rightsquigarrow r_1;\, 2 \rightsquigarrow r_2]{0 \rightsquigarrow Id}$$

$\star$	Id	r_1	r_2
Id	Id	r_1	r_2
r_1	r_1	r_2	Id
r_2	r_2	Id	r_1

“Grupo cíclico de orden 3”.

“La matemática es el arte de dar el mismo nombre a cosas distintas”:

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

$$\xrightarrow[1\rightsquigarrow r_1;2\rightsquigarrow r_2]{0\rightsquigarrow Id}$$

$\star$	Id	r_1	r_2
Id	Id	r_1	r_2
r_1	r_1	r_2	Id
r_2	r_2	Id	r_1

“Grupo cíclico de orden 3”.

“La matemática es el arte de dar el mismo nombre a cosas distintas”:

La naturaleza concreta de los objetos y de la operación deja de ser relevante.

¿Para qué sirve la teoría de grupos?

- Resolución de ecuaciones algebraicas,

¿Para qué sirve la teoría de grupos?

- Resolución de ecuaciones algebraicas,
- Geometría

¿Para qué sirve la teoría de grupos?

- Resolución de ecuaciones algebraicas,
- Geometría
- Múltiples aplicaciones a criptografía, química, música, etc...

¿Para qué sirve la teoría de grupos?

- Resolución de ecuaciones algebraicas,
- Geometría
- Múltiples aplicaciones a criptografía, química, música, etc...
- El juego del 15

¿Para qué sirve la teoría de grupos?

- Resolución de ecuaciones algebraicas,
- Geometría
- Múltiples aplicaciones a criptografía, química, música, etc...
- El juego del 15
- Teoría de grupos en la actualidad: más de 1000 artículos al año.

$\star$	Id	Rot_{120}	Rot_{240}	Ref_1	Ref_2	Ref_3
Id	Id	Rot_{120}	Rot_{240}	Ref_1	Ref_2	Ref_3
Rot_{120}	Rot_{120}	Rot_{240}	Id	Ref_2	Ref_3	Ref_1
Rot_{240}	Rot_{240}	Id	Rot_{120}	Ref_3	Ref_1	Ref_2
Ref_1	Ref_1	Ref_3	Ref_2	Id	Rot_{240}	Rot_{120}
Ref_2	Ref_2	Ref_1	Ref_3	Rot_{120}	Id	Rot_{240}
Ref_3	Ref_3	Ref_2	Ref_1	Rot_{240}	Rot_{120}	Id

+	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

Conteo de los grupos finitos

n número entero:

Conteo de los grupos finitos

n número entero:
$f(n)$ el número de grupos distintos con n elementos.

Conteo de los grupos finitos

n número entero:
$f(n)$ el número de grupos distintos con n elementos.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	16	24	32
$f(n)$	1	1	1	2	1	2	1	5	2	2	5	14	15	51

n	48	64	80	96	128	192	256	512
$f(n)$	52	267	52	231	2328	1543	56092	10494213

$$f(1024) = 49487365422$$

Conteo de los grupos finitos

n número entero:
$f(n)$ el número de grupos distintos con n elementos.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	16	24	32
$f(n)$	1	1	1	2	1	2	1	5	2	2	5	14	15	51

n	48	64	80	96	128	192	256	512
$f(n)$	52	267	52	231	2328	1543	56092	10494213

$$f(1024) = 49487365422$$

- $f(2048) =$???

Conteo de los grupos finitos

n número entero:
$f(n)$ el número de grupos distintos con n elementos.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	16	24	32
$f(n)$	1	1	1	2	1	2	1	5	2	2	5	14	15	51

n	48	64	80	96	128	192	256	512
$f(n)$	52	267	52	231	2328	1543	56092	10494213

$$f(1024) = 49487365422$$

- $f(2048) = ???$
- ¿Puede aparecer cualquier número como $f(n)$?

Conteo de los grupos finitos

n número entero:
$f(n)$ el número de grupos distintos con n elementos.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	16	24	32
$f(n)$	1	1	1	2	1	2	1	5	2	2	5	14	15	51

n	48	64	80	96	128	192	256	512
$f(n)$	52	267	52	231	2328	1543	56092	10494213

$$f(1024) = 49487365422$$

- $f(2048) =???$
- ¿Puede aparecer cualquier número como $f(n)$?
  (Ej: $f(75) = 3$ y $f(n) \neq 3$ para $n < 75$),

Conteo de los grupos finitos

n número entero:
$f(n)$ el número de grupos distintos con n elementos.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	16	24	32
$f(n)$	1	1	1	2	1	2	1	5	2	2	5	14	15	51

n	48	64	80	96	128	192	256	512
$f(n)$	52	267	52	231	2328	1543	56092	10494213

$$f(1024) = 49487365422$$

- $f(2048) =???$
- ¿Puede aparecer cualquier número como $f(n)$?
  (Ej: $f(75) = 3$ y $f(n) \neq 3$ para $n < 75$),
- **Conjetura**: $f(f(f(\ldots(n)))) = 1$

Conteo de los grupos finitos

n número entero:
$f(n)$ el número de grupos distintos con n elementos.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	16	24	32
$f(n)$	1	1	1	2	1	2	1	5	2	2	5	14	15	51

n	48	64	80	96	128	192	256	512
$f(n)$	52	267	52	231	2328	1543	56092	10494213

$$f(1024) = 49487365422$$

- $f(2048) =$???
- ¿Puede aparecer cualquier número como $f(n)$?
  (Ej: $f(75) = 3$ y $f(n) \neq 3$ para $n < 75$),
- **Conjetura**: $f(f(f(\ldots(n)))) = 1$
  $1024 \longrightarrow 49487365422 \longrightarrow 240 \longrightarrow 208 \longrightarrow 51 \longrightarrow 1.$

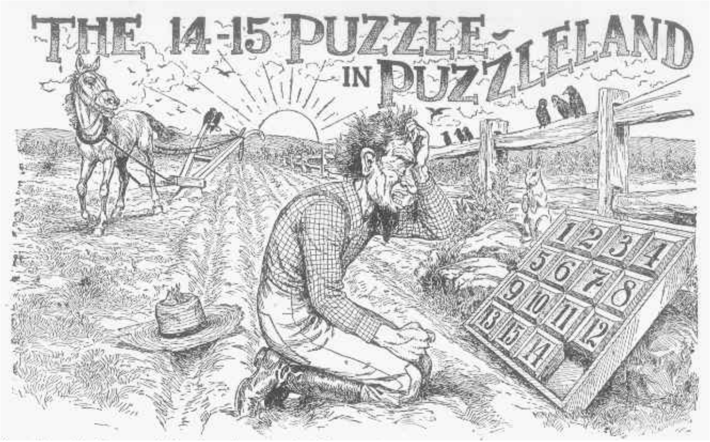
Group **Nu**mber

$gnu(75) = 3$

Minimal **O**rder **A**ttaining

$moa(3) = 75$

(según Conway, Dietrich, O'Brien).


THE 14-15 PUZZLE
IN PUZZLELAND
1 2 3 4
5 6 7 8
9 10 11 12
13 15 14

Grupo simétrico sobre 16 objetos $\mathfrak{S}_{16}$

Elementos: permutaciones de los números de 1 a 16.

Grupo simétrico sobre 16 objetos $\mathfrak{S}_{16}$

Elementos: permutaciones de los números de 1 a 16.
Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 2 & 3 & 7 & 4 & 5 & 6 & 11 & 12 & 15 & 9 & 16 & 13 & 8 & 10 & 14 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\star$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 2 & 3 & 7 & 4 & 5 & 6 & 11 & 12 & 15 & 9 & 16 & 13 & 8 & 10 & 14 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 3 & 7 & 11 & 4 & 5 & 6 & 16 & 13 & 14 & 15 & 1 & 8 & 12 & 9 & 10 & 2 \end{pmatrix}$$

$\mathfrak{S}_{16}$ tiene 20922789888000 elementos.

$\mathfrak{S}_{16}$ tiene 20922789888000 elementos.

Transposición: sólo cambia 2 números.

$\mathfrak{S}_{16}$ tiene 20922789888000 elementos.

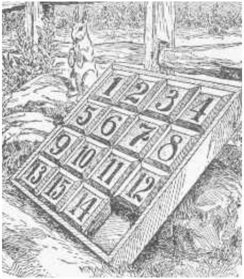
Transposición: sólo cambia 2 números. Por ejemplo,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \color{red}{7} & 8 & 9 & 10 & 11 & \color{red}{12} & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \color{red}{12} & 8 & 9 & 10 & 11 & \color{red}{7} & 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$$

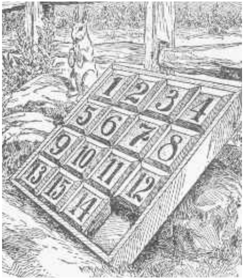
Configuración del juego del 15 $\leftrightsquigarrow$ permutación en $\mathfrak{S}_{16}$:

Configuración del juego del 15 $\leftrightsquigarrow$ permutación en $\mathfrak{S}_{16}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 2 & 3 & 7 & 4 & 5 & 6 & 11 & 12 & 15 & 9 & 16 & 13 & 8 & 10 & 14 & 1 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 15 & 14 & 16 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 15 & 14 & 16 \end{pmatrix}$$

Transposición

Un movimiento corresponde a multiplicar por una transposición:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 2 & 3 & 7 & 4 & 5 & 6 & 11 & 12 & 15 & 9 & 16 & 13 & 8 & 10 & 14 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\star$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$$

$$=$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 1 & 3 & 7 & 4 & 5 & 6 & 11 & 12 & 15 & 9 & 16 & 13 & 8 & 10 & 14 & 2 \end{pmatrix}$$

Teorema

Se puede definir el SIGNO de una permutación de modo que :

- *Neutro es positivo,*
- *Transposición es negativo*
- *Si P es permutación y T es transposición, el signo de $P \star T$ es opuesto al signo de P.*

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

$\longrightarrow$

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

$\longrightarrow$

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

- el blanco (16) vuelve a su posición inicial...

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

$\longrightarrow$

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

- el blanco (16) vuelve a su posición inicial...
- ...después de un número par de movimientos.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

$\longrightarrow$

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

- el blanco (16) vuelve a su posición inicial...
- ...después de un número par de movimientos.
- un número par de transposiciones.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

$\longrightarrow$

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

- el blanco (16) vuelve a su posición inicial...
- ...después de un número par de movimientos.
- un número par de transposiciones.
- Permutación inicial, neutro, tiene signo +

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

$\longrightarrow$

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

- el blanco (16) vuelve a su posición inicial...
- ...después de un número par de movimientos.
- un número par de transposiciones.
- Permutación inicial, neutro, tiene signo +
- se cambia el signo un número par de veces

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

$\longrightarrow$

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

- el blanco (16) vuelve a su posición inicial...
- ...después de un número par de movimientos.
- un número par de transposiciones.
- Permutación inicial, neutro, tiene signo +
- se cambia el signo un número par de veces
- Luego, el signo final es +

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

$\longrightarrow$

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

- el blanco (16) vuelve a su posición inicial...
- ...después de un número par de movimientos.
- un número par de transposiciones.
- Permutación inicial, neutro, tiene signo +
- se cambia el signo un número par de veces
- Luego, el signo final es +
- Contradice que el signo de la transposición [14,15] es -.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

$\longrightarrow$

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

- el blanco (16) vuelve a su posición inicial...
- ...después de un número par de movimientos.
- un número par de transposiciones.
- Permutación inicial, neutro, tiene signo +
- se cambia el signo un número par de veces
- Luego, el signo final es +
- Contradice que el signo de la transposición [14,15] es -.

Conclusión. Para “resolver” el problema, hay que hacer trampas!

¡Gracias!